**Лек 8.Многомерные оптимальные системы**

            Вначале подытожим основные результаты, полученные при решении задачи синтеза одномерной оптимальной реализуемой системы управления.

            Пусть входное воздействие g(t) представляется реализацией случайного процесса с энергетическим спектром  и в сумме z(t)=g(t)+n(t) с белым шумом (помехой) n(t) поступает на систему управления. В соответствии с методом Винера оптимальная реализуемая система имеет передаточную функцию

 ,

где  ,      x(jw)=WP(jw)Z(jw).

            Р.Калман предложил другое представление того же решения в виде дифференциального уравнения  .

            При этом входное воздействие g(t) удобно представить в виде выходного сигнала фильтра (рис.38), описываемого дифференциальным уравнением .

            Фильтр, с помощью которого моделируется входное воздействие g(t), обычно называют **формирующим фильтром**. Само же входное воздействие g(t) при этом является состоянием формирующей системы.

            Было установлено, что при описании входных сигналов в виде состояния некоторой системы всегда получается решение в виде точно такой же по виду системы с обратной связью. При этом  структура САУ сохраняется для любого интервала времени, в том числе и во время переходного процесса, при изменении коэффициентов  во времени, а также в случае, когда x(t) является вектором, т.е. при одновременном управлении по нескольким параметрам. И во всех этих случаях структура системы управления оказывается оптимальной в смысле минимума дисперсии ошибки  .

В этом разделе вначале рассматриваются математические модели входных многомерных нестационарных воздействий. После этого обсуждается структура оптимальной многомерной системы, которая называется фильтром Калмана.

**Описание входных воздействий**

            Пусть нам необходимо осуществлять управление одновременно n выходными сигналами системы  При этом мы хотим получить наименьшие отличия этих сигналов от заданных функций – входных воздействий . Будем описывать входные воздействия с помощью системы линейных дифференциальных уравнений состояния:

,

где A(t) – (n  n) – матрица:;  – векторный белый шум с энергетическим спектром каждой компоненты  соответственно.

            V(t) - (n  m)-матрица V(t)=.

            Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Уравнение состояния для трех независимых параметров.

            Предположим, что необходимо обеспечить измерение траектории по 3 координатам, не связанным друг с другом. Эти координаты описываются случайными процессами, соответствующими дифференциальным уравнениям:



            Введем вектор , матрицу  и белый шум  . Тогда одновекторное уравнение состояния  в точности описывает все заданные входные воздействия Для проверки достаточно раскрыть в этом уравнении матричные и векторные обозначения.

**Пример 2.** Входное воздействие с дробно-рациональным энергетическим спектром.

            Пусть  g(t) описывается дифференциальным уравнением вида:

.

            Найдем энергетический спектр такого воздействия. Для этого вначале выполним преобразование Лапласа     и запишем передаточную функцию формирующего фильтра

  .

Энергетический спектр входного воздействия находится по формуле  .    При выборе различных коэффициентов  могут быть получены энергетические спектры разнообразной формы. Но рассматриваемое уравнение имеет третий порядок. Преобразуем его в одно векторное уравнение. Введем вспомогательные переменные:.  Тогда исходное уравнение перепишется в форме:

.

            Введем теперь вектор  и  тогда , где . Таким образом дифференциальное уравнение третьего порядка удается преобразовать к стандартной векторной форме. Очевидно, что точно так же к векторному уравнению первого порядка можно преобразовать дифференциальное уравнение произвольного порядка.

**Пример 3.** Полиномиальное воздействие.

            Пусть . Такой входной сигнал получается как решение следующего дифференциального уравнения  . Заметим, что этот результат можно рассматривать как частный случай предыдущего примера, полагая  . Тогда ,  – начальные условия.

            Введем вспомогательные переменные . Тогда уравнения состояния запишутся в виде:



 или в стандартной форме:

  ,

где ,  .

            Таким образом, исходное дифференциальное уравнение состояния  описывает широкий класс реальных случайных процессов.

            Пусть теперь  передается по каналу связи и вместе с помехой поступает на вход системы управления:

, где , C(t)=;

=– помеха в виде векторного белого шума со спектральными плотностями каждой компоненты  соответственно.

            Рассмотренная векторная модель позволяет дать математическое описание различных ситуаций, возникающих при формировании входных сигналов проектируемых САУ.

**Пример 4.** Предположим, что один и тот же входной сигнал g(t) передается по двум независимым каналам связи. При этом на выходе первого канала наблюдается смесь  сигнала  с помехой , а на выходе второго канала наблюдается процесс . Для того, чтобы представить такие наблюдения в стандартной векторной форме, введем векторы  и матрицу . В этом случае одно векторное уравнение  или  описывает двухканальную систему наблюдений скалярного процесса .

**Пример 5.** Пусть входной сигнал  имеет сложный энергетический спектр и описывается дифференциальным уравнением третьего порядка (см. пример 2). В этом случае уравнение состояния включает трехмерный вектор . Производятся наблюдения сигнала  на фоне помехи  . Для того, чтобы получить стандартное представление наблюдений  необходимо ввести матрицу .

**Многомерный фильтр Калмана**

            Наблюдаемый многомерный сигнал  поступает на систему управления. В наилучшей системе обеспечивается минимум суммарной ошибки:

.

            Структура оптимальной системы описывается следующим уравнением:

,

где ,

а  . Последнее уравнение является дифференциальным уравнением Риккати и обычно требует ЭВМ для решения. Но это решение находится, как правило, один раз до проведения эксперимента. После этого значения V(t) могут храниться в памяти. Уравнение для матрицы V(t) называется **дисперсионным**, поскольку V(t) – точная матрица дисперсий и взаимных ковариаций ошибок управления.

            Итак, и в многомерном нестационарном случае система управления сохраняет свою структуру (рис. 39). По-прежнему это система, в которой формируется сигнал ошибки . Он поступает на фильтр, включающий переменный коэффициент усиления K(t) и интеграторы, охваченные обратной связью.



Рис. 39

 При этом часть системы в точности соответствует формирующему  фильтру.

**Пример 6.**Еще раз рассмотрим систему управления при входном сигнале, заданном уравнением:

, ,

где .

            В этом случае уравнение Калмана для наблюдений z(t)=g(t)+n(t) запишется в виде:

,

где K(t)=V(t);

.

            Существенной особенностью записанного уравнения фильтрации является зависимость коэффициента усиления K(t)  от времени. Это связано с тем, что фильтр Калмана учитывает переходный процесс в системе и оптимален для каждого момента времени t. Характерную зависимость V(t) можно проиллюстрировать графиком на рис. 40.



Рис. 40

В начальный момент времени (t=0) рассогласование между выходным сигналом x(t=0)=0 системы управления и заданной траекторией движения g(t=0)=g(0) может быть большим. Поэтому  и коэффициент усиления К(t=0)=   в этот момент наибольший. По мере уменьшения динамической ошибки в процессе работы системы коэффициент усиления уменьшается  и стремится к оптимальному для установившегося режима значению . Это значение можно найти, полагая =0  в установившемся режиме. Тогда из уравнения Риккати получаем: , где  или . Решение этого уравнения  совпадает с известной величиной дисперсии ошибки стационарного реализуемого фильтра Винера.

            Итак, для одномерного случая отличием приведенного решения является учет переходного процесса и выбор оптимальных параметров системы управления в каждый момент времени.

            Оптимальное управление предполагает точное знание моделей входных воздействий и характеристик помех. Однако на практике численные значения параметров моделей известны не точно. Кроме того, вычислительные трудности ограничивают применение сложных моделей высокой размерности, предопределяя применение более грубых и более простых приближений к реальным процессам.

            Указанные причины приводят к отклонению действительных характеристик эффективности от расчетных. Величина отклонений действительных характеристик систем управления от потенциальных за счет изменения параметров внешних воздействий называется**чувствительностью системы управления**.

            Предположим, что Q – некоторый показатель качества, например, средний квадрат ошибки системы, зависящий от некоторого параметра  входного сигнала. При отклонении  от заданного значения 0 показатель качества Q также отклоняется от оптимального значения Q0. В этом случае чувствительность можно характеризовать отношением: а при малых отклонениях – величиной  Чем выше чувствительность, тем больше опасений, что в реальных условиях система управления будет иметь худшие характеристики качества по сравнению с расчетными. Если, наоборот, величина  мала, то допустимы значительные отклонения параметров внешних воздействий. В предельном случае, когда =0, показатель качества системы вообще не зависит от параметра . В таком случае говорят, что **система управления инвариантна** относительно параметра .

            В этом разделе рассмотрены два подхода к построению оптимальных систем управления. Первый подход связан с именем Н. Винера и основан на нахождении структуры оптимальной системы с помощью решения интегрального уравнения. Главные недостатки этого метода – сложность решения задач синтеза САУ и требования к стационарности входных воздействий. Поэтому при проектировании современных нестационарных систем управления применяется метод пространства состояний, предложенный Р. Калманом. Этот метод позволяет на инженерном уровне решать сложные задачи построения оптимальных многомерных систем с учетом переходных процессов в условиях нестационарных помех и нестационарных воздействий.